模块二 基本不等式

第 1 节 基本不等式的常见用法与拼凑技巧（★★☆）

强化训练

1.（2023•福建模拟•★）函数 $y=x+\frac{1}{x+1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值是（　　）

（A）-2　　（B）1　　（C）2　　（D）3

答案： B

解析： 要求和的最小值，应凑“积定”，分母为 $x+1$，故将前面的 x 也凑成 $x+1$，

由题意，$y=x+\frac{1}{x+1}=(x+1)+\frac{1}{x+1}-1\ge 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}-1=1$，取等条件是 $x+1=\frac{1}{x+1}$，即 $x=0$，

所以 $y=x+\frac{1}{x+1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值是 1.

2.（2023•全国模拟•★）已知 $0<x<1$，则 $x(4-3x)$ 的最大值为_____.

答案： $\frac{4}{3}$

解析： 要求积的最大值，考虑凑出和为定值，在外面的 x 上乘以 3 即可，

由题意，$x(4-3x)=\frac{1}{3}\times 3x(4-3x)\le\frac{1}{3}\cdot[\frac{3x+(4-3x)}{2}]^2=\frac{4}{3}$，

当且仅当 $3x=4-3x$，即 $x=\frac{2}{3}$ 时取等号，所以 $x(4-3x)$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$.

3.（★★）已知 x，y 均为正数，且 $2^{x-6}=(\frac{1}{4})^y$，则 xy 的最大值为（　　）

（A）$\frac{9}{2}$　　（B）$\frac{9}{8}$　　（C）$\frac{3}{2}$　　（D）$\frac{9}{4}$

答案： A

解析： 题干给了一个等式，应先将其化简，可把右侧的底数化为 2 再看，

由题意，$2^{x-6}=(\frac{1}{4})^y=(2^{-2})^y=2^{-2y}$，所以 $x-6=-2y$，故 $x+2y=6$ ①，

有了和为定值，要求积的最大值，直接用均值不等式即可，所以 $6=x+2y\ge 2\sqrt{x\cdot 2y}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{xy}$，

化简得：$xy\le\frac{9}{2}$，当且仅当 $x=2y$ 时取等号，结合式①可得 $x=3$，$y=\frac{3}{2}$，故 xy 的最大值为 $\frac{9}{2}$.

4.（2023•天津南开一模•★★）已知实数 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则 2^a+2^b 的最小值为_____.

答案： $2\sqrt{2}$

解析： 要求和的最小值，应找“积定”，先看有无现成的积定，$2^a\cdot 2^b=2^{a+b}=2$，有“积定”，故直接用均值不等式求和的最小值即可，

由题意，$2^a+2^b\ge 2\sqrt{2^a\cdot 2^b}=2\sqrt{2^{a+b}}=2\sqrt{2}$，取等条件是$2^a=2^b$，即$a=b$，结合$a+b=1$可得$a=b=\frac{1}{2}$，所以$2^a+2^b$的最小值为$2\sqrt{2}$.

5．（2022·江西九江模拟·★）已知$a>0$，$b>0$，$a+b=2$，则$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$的最小值为_____.

答案：$\frac{9}{2}$

解析：观察发现可用“1”的代换凑出积为定值，

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})\cdot 1=(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})\cdot 2\times\frac{1}{2}=(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})(a+b)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4)=\frac{1}{2}(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+5)\ge\frac{1}{2}(2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}+5)=\frac{9}{2},$$

当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$时取等号，结合$a+b=2$可得$\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\ b=\frac{4}{3}\end{cases}$，故$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$的最小值为$\frac{9}{2}$.

6．（2023·全国模拟·★★★）已知$m>n>0$，且$m+n=1$，则$\frac{6}{m-n}+\frac{1}{3n}$的最小值为_____.

答案：$\frac{32}{3}$

解析：看到分子为两个正常数，想到将分母整体换元，看能否转化为“1”的代换基本模型来处理，

设$\begin{cases}a=m-n\\ b=3n\end{cases}$，则$\begin{cases}m=a+\frac{b}{3}\\ n=\frac{b}{3}\end{cases}$，由$m>n>0$可得$a>0$，$b>0$，

因为$m+n=1$，所以$a+\frac{b}{3}+\frac{b}{3}=1$，整理得：$3a+2b=3$ ①，

故$\frac{6}{m-n}+\frac{1}{3n}=\frac{6}{a}+\frac{1}{b}=(\frac{6}{a}+\frac{1}{b})\cdot 1=(\frac{6}{a}+\frac{1}{b})\cdot 3\times\frac{1}{3}=(\frac{6}{a}+\frac{1}{b})(3a+2b)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(18+\frac{12b}{a}+\frac{3a}{b}+2)$

$=\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{20}{3}\ge 2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+\frac{20}{3}=\frac{32}{3}$，取等条件是$\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，结合①可得此时$a=\frac{3}{4}$，$b=\frac{3}{8}$，

代入$\begin{cases}m=a+\frac{b}{3}\\ n=\frac{b}{3}\end{cases}$得$\begin{cases}m=\frac{7}{8}\\ n=\frac{1}{8}\end{cases}$，满足条件，所以$\frac{6}{m-n}+\frac{1}{3n}$的最小值为$\frac{32}{3}$.

【反思】涉及两个分式之和的最小值问题，尤其是分子均为正常数时，可尝试将分母整体换元，看能否转化为“1”的代换基本模型来处理.

7．（2023·湖南株洲模拟·★★★）已知$0<x<1$，若关于x的不等式$\frac{4}{x}+\frac{1}{1-x}<m^2-8m$有解，则实数$m$的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-9)\cup(1,+\infty)$　（B）$(-1,9)$　（C）$(-\infty,-1)\cup(9,+\infty)$　（D）$(-\infty,-1]\cup[9,+\infty)$

答案：C

解析：问题等价于 $(\frac{4}{x}+\frac{1}{1-x})_{\min}<m^2-8m$，故先求 $\frac{4}{x}+\frac{1}{1-x}$ 的最小值，注意到分母和为定值，故可将分母换元，转化成“1”的代换基本模型来处理，

设 $a=x$，$b=1-x$，则 $0<a<1$，$0<b<1$，且 $a+b=1$，

所以 $\frac{4}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=(\frac{4}{a}+\frac{1}{b})\cdot 1=(\frac{4}{a}+\frac{1}{b})(a+b)=4+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}+1=\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}+5\ge 2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+5=9$，

当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$ 时取等号，此时 $a=2b$，结合 $a+b=1$ 可得 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{3}$，故 $(\frac{4}{x}+\frac{1}{1-x})_{\min}=9$，

所以 $9<m^2-8m$，故 $m^2-8m-9>0$，解得：$m<-1$ 或 $m>9$.

8.（2023·天津模拟·★★★）若 $b>a>1$，且 $3\log_a b+2\log_b a=7$，则 $a^2+\frac{3}{b-1}$ 的最小值为_____.

答案：$2\sqrt{3}+1$

解析：注意到 $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$，故所给等式可化为关于 $\log_a b$ 的方程，解出 $\log_a b$，将 a 和 b 的关系化简，

因为 $3\log_a b+2\log_b a=7$，所以 $3\log_a b+\frac{2}{\log_a b}=7$，故 $3(\log_a b)^2-7\log_a b+2=0$，解得：$\log_a b=2$ 或 $\frac{1}{3}$，

又 $b>a>1$，所以 $\log_a b>1$，从而 $\log_a b=2$，故 $a^2=b$，可用这一关系式将目标式消元，再凑积定，

所以 $a^2+\frac{3}{b-1}=b+\frac{3}{b-1}=(b-1)+\frac{3}{b-1}+1\ge 2\sqrt{(b-1)\cdot\frac{3}{b-1}}+1=2\sqrt{3}+1$，

取等条件是 $b-1=\frac{3}{b-1}$，解得：$b=\sqrt{3}+1$，满足题意，故 $(a^2+\frac{3}{b-1})_{\min}=2\sqrt{3}+1$.

9.（2022·广东湛江二模·★★★）若 $a,b\in(0,+\infty)$，且 $\sqrt{a}+\frac{4}{b}=9$，则 $b+\frac{\sqrt{a}}{a}$ 的最小值为_____.

答案：1

解析：所给等式为根式与分式的混合，结构较复杂，先通过换元将其化简，

设 $x=\sqrt{a}$，$y=\frac{4}{b}$，则 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=9$，$b+\frac{\sqrt{a}}{a}=\frac{4}{y}+\frac{1}{x}$，这样就又变成了“1”的代换基础模型，

所以 $b+\frac{\sqrt{a}}{a}=\frac{4}{y}+\frac{1}{x}=(\frac{4}{y}+\frac{1}{x})\cdot 1=(\frac{4}{y}+\frac{1}{x})\cdot 9\times\frac{1}{9}=(\frac{4}{y}+\frac{1}{x})(x+y)\times\frac{1}{9}=\frac{1}{9}(\frac{4x}{y}+4+1+\frac{y}{x})$

$=\frac{1}{9}(\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}+5)\ge\frac{1}{9}(2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+5)=1$，

取等条件是 $\frac{4x}{y}=\frac{y}{x}$，结合 $x+y=9$ 可得 $\begin{cases}x=3\\y=6\end{cases}$，从而 $a=9$，$b=\frac{2}{3}$，满足题意，故 $b+\frac{\sqrt{a}}{a}$ 的最小值为 1.

【反思】当所给条件较复杂，不易看出如何变形凑定值时，不妨换元，将条件化简，往往可使问题明朗化.